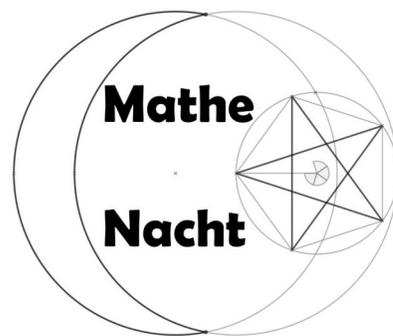
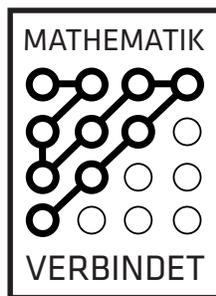


# Integralrechnung Lösungen



**ACHTUNG:** Die Lösungen wurden nicht auf ihre Richtigkeit überprüft. Wer Fehler findet, meldet diese bei manuela.paschkowski@mathematik.uni-halle.de

## 1. Aufgabe:

a) Mit der Substitutionsregel (11.13)

$$\int_a^b g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(x) dx$$

und  $g(x) := x$ ,  $\varphi(x) := f(x)$  berechnet man

$$\int_a^b f(x)f'(x)dx = \int_{f(a)}^{f(b)} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{f(a)}^{f(b)} = \frac{f^2(b)}{2} - f^2(a)2$$

Durch Multiplikation mit 2 steht die Formel da.

b) Mit der Regel der partiellen Integration (11.14)

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = (uv) \Big|_a^b - \int u'(x)v(x)dx$$

und  $u = f$ ,  $v = f$  erhält man

$$\int_a^b f(x)f'(x)dx = (f^2) \Big|_a^b - \int f'(x)f(x)dx$$

Durch Addition des Integrals auf beiden Seiten und Einsetzen von  $a$  und  $b$  in  $f^2$  erhält man die Formel.

## 2. Aufgabe:

Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale existieren, und berechnen Sie im Falle der Existenz ihren Wert:

a) Wenn  $\alpha = 0$  erhält man

$$\int_0^\infty x^2 dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^3}{3} \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^3}{3}$$

dass das Integral divergiert (gegen  $+\infty$ ). Für  $\alpha \neq 0$  kann man 2mal partiell integrieren und bekommt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-\alpha x} \left( -\frac{x^2}{\alpha} - \frac{2x}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3} \right) \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-\alpha b} \left( -\frac{b^2}{\alpha} - \frac{2b}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3} \right) + \frac{2}{\alpha^3} \end{aligned}$$

Da exponentielles Wachstum schneller wächst als polynomiell, konvergiert dieser Limes für  $\alpha > 0$  gegen den Wert des Integrals  $2/\alpha^3$  und für  $\alpha < 0$  divergiert der Limes.

b) Da  $\ln|x|$  symmetrisch ist, können wir schreiben:

$$\int_{-1}^1 \ln|x| dx = 2 \int_0^1 \ln(x) dx$$

Mit partieller Integration mit  $v'(x) = 1, u(x) = \ln(x)$  erhält man

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 \ln(x) dx &= \lim_{a \rightarrow 0} 2 \left( x \ln(x) - x \right) \Big|_a^1 \\ &= -2 - \lim_{a \rightarrow 0} (2a(\ln(a) - 1)) \end{aligned}$$

Der Grenzwert ergibt sich mit L'Hospital zu Null.

c) Mit der Substitution  $\varphi(x) = 1/x, g(x) = \sin(x)$  erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^{1/\pi} -\frac{\sin(1/x)}{x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{1/a}^{\pi} \sin(x) dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} -\cos(x) \Big|_{1/a}^{\pi} = 1 + \lim_{a \rightarrow 0} \cos(1/a) \end{aligned}$$

Dieser Grenzwert existiert nicht, da z.B. die Funktionswerte der Nullfolge  $a_n = 1/(2n\pi)$  gegen  $\cos(1/a_n) \rightarrow 1$  konvergieren und der Nullfolge  $b_n = 1/((2n+1)\pi)$  gegen  $\cos(1/b_n) \rightarrow -1$ .

d) Für  $x \in (0, 1]$  kann man auf den Grenzwert L'Hospital anwenden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{e^{nx^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 e^{nx^2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x e^{nx^2}} = 0$$

In  $x = 0$  ist  $nx e^{-nx^2}$  auch gleich Null, sodass

$$\int_0^1 \left( \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot x \cdot e^{-nx^2} \right) dx = 0.$$

Wenn man aber Grenzwert und Integral vertauscht, resultiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (n \cdot x \cdot e^{-nx^2}) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{e^{-nx^2}}{2} \Big|_0^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} - \frac{e^{-n}}{2} = \frac{1}{2}$$

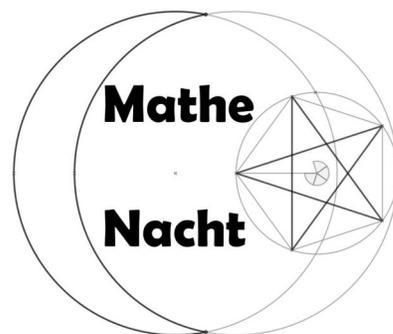
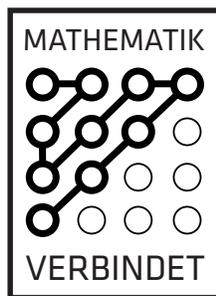
Man sieht, dass die Funktionenfolge  $f_n(x) = nx \cdot e^{-nx^2}$  zwar punktweise gegen  $f(x) = 0$  konvergiert, aber nicht gleichmäßig. Daher kann man Integral und Grenzwert nicht vertauschen.

### **3. Aufgabe:**

Antwort c) ist richtig. Der Hauptsatz der Integralrechnung besagt, dass es für  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig eine Stammfunktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F'(x) = f(x), \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  gibt.

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung sagt, dass für die stetig differenzierbare Funktion  $F$  ein  $c \in (a, b)$  gibt mit  $F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$

# Potenzreihen Lösungen



## 1. Aufgabe:

a) Mit dem Quotientenkriterium für Potenzreihen und  $a_k = e^k/(3k)$  berechnet man

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e^k 3(k+1)}{3k e^{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{k}}{e} = \frac{1}{e}$$

In  $x = 1/e$  ist die Potenzreihe äquivalent zu der divergenten Reihe  $\frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ . Für  $x = -1/e$  ist die Potenzreihe äquivalent zu  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3k}$ . Da  $1/(3k)$  eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die Reihe nach dem Leibnizkriterium.

b) Nach dem Wurzelkriterium für Potenzreihen kann man mit  $a_k = (-1)^{k-1} \frac{3^{k-1}}{2^{k+2}}$  berechnen

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3^{1-1/k}}{2^{1+2/k}} = \frac{3}{2}, R = \frac{1}{L} = \frac{2}{3}$$

In  $x = \pm 2/3$  sind die Potenzreihen äquivalent zu  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{12}$  bzw.  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k-1} \frac{1}{12}$ . Da hinter dem Summenzeichen keine Nullfolgen stehen, divergieren die Reihen

## 2. Aufgabe:

Da  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  folgt

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} dx$$

Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist  $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1/(k+1)!}{1/(k+2)!} = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+2) = \infty$ . D.h., die Potenzreihe konvergiert auf den ganzen reellen Zahlen. Nach Satz 13.1. wissen wir aber auch, dass Potenzreihen Funktionenfolgen sind, die für alle  $0 < r < R$  auf  $(-r, r)$  gleichmäßig konvergieren. Also konvergiert unsere Potenzreihe auf  $[0, 1]$  für z.B.  $r = 2$  gleichmäßig und wir können Integral und Summe vertauschen

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^k}{(k+1)!} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+1)!}$$

Da eine konvergente Majorante die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  ist, konvergiert die Reihe bzw. das uneigentliche Integral.

## 3. Aufgabe:

Die richtige Antwort ist d). Nach dem Hauptsatz der Integralrechnung ist  $F(x) = f'(x) = \ln(1+x)$  mit

$$F^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} (k-1)!}{(1+x)^k}$$

#### 4. Aufgabe:

a)  $f$  ist beliebig oft differenzierbar mit

$$f'(x) = \cos(x) - \sin(x), \quad f''(x) = -\sin(x) - \cos(x)$$

und  $f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = -1$ . Also ergibt sich

$$T_2(x; 0) = f(0) + \frac{f'(0)}{0!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + x - \frac{x^2}{2}$$

b) **Behauptung:** Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{1}{3}|x|^3$ .

**Beweis:** Nach dem Satz für Taylor gilt für alle mind. 3-mal stetig differenzierbaren Funktionen

$$|f(x) - T_2(x; 0)| = |R_2(x; 0)|$$

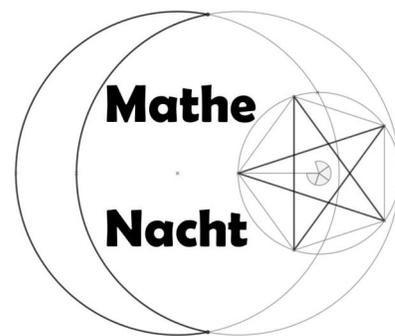
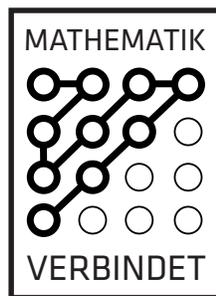
mit

$$R_2(x; 0) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3,$$

wobei  $\xi$  zwischen  $x$  und Null liegt. Hier ist  $|f'''(\xi)| = |-\cos(\xi) + \sin(\xi)| \leq |\cos(\xi)| + |\sin(\xi)| \leq 2$  für alle  $\xi \in \mathbb{R}$ . Es folgt

$$|f(x) - T_2(x; 0)| = |R_2(x; 0)| = \left| \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 \right| \leq \left| \frac{2}{6}x^3 \right| = \frac{1}{3}|x|^3$$

# Metrische Räume Lösungen



## 1. Aufgabe:

a) Das ist falsch. Seien für  $i \in \mathbb{N}$   $U_i = (-1/i, 1/i) \subset \mathbb{R}$  offene Intervalle. Es gilt aber

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i = \{0\}$$

und die einelementige Menge  $\{0\}$  ist abgeschlossen

b) Das ist wahr. Sei  $M = \{x\} \subset \mathbb{R}^n$  und  $(x_n) \subset M$ . Dann muss  $x_n = x$  gelten und jede Teilfolge  $x_{n_k} = x$  ist konstant und konvergiert somit gegen  $x$ . Damit besitzt jede Folge aus  $M$  eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert in  $M$  liegt. Das ist die Definition einer folgenkompakten Menge. In metrischen Räumen (wie  $\mathbb{R}^n$  mit einer beliebigen Metrik) ist Folgenkompaktheit identisch mit Kompaktheit.

c) Das ist wahr. Sei  $f(x) = \|x\|$  ein beliebige Norm auf  $\mathbb{R}^n$ , dann ist  $f$  stetig, wenn  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 :$

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Für ein beliebiges  $\epsilon > 0$  gilt für  $\delta = \epsilon$  mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$||x| - |y|| \leq \|x - y\|$$

die Implikation  $\|x - y\| < \delta = \epsilon \Rightarrow$

$$|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq \|x - y\| < \epsilon.$$

d) Das ist falsch. z.B. ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $A = (-1, 1)$  ein offenes Intervall. Das Bild  $f(A) = [0, 1)$  ist aber nicht offen.

## 2. Aufgabe:

$M_1, M_5$  sind offen und  $M_1, M_5$  und  $M_4$  für  $n = 1$  sind beschränkt.

## 3. Aufgabe:

Sei  $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ . Der Zähler ist äquivalent zu der Manhattan-Norm, die nach 1c) eine stetige Funktion ist. Der Nenner ist äquivalent zur euklidischen Norm, die ebenso nach 1c) stetig ist und vor allem in einer Umgebung von  $(x_1, x_2, x_3)$  nicht Null ist. Damit ist  $f$  nach Korollar 14.16 als Hintereinanderausführung von stetigen Funktionen wieder stetig.

Sei  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ . Die Punktfolge  $(1/n, 1/n, 1/n)$  konvergiert gegen  $(0, 0, 0)$  mit

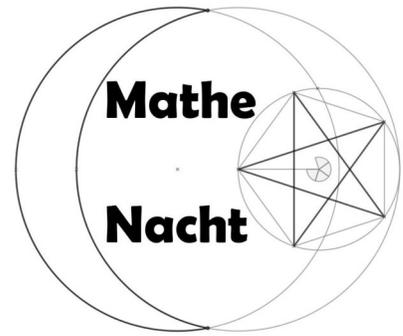
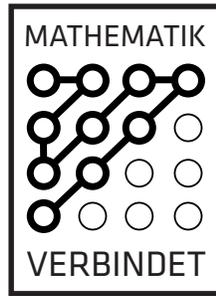
$$f(1/n, 1/n, 1/n) = \frac{3/n}{\sqrt{3/n^2}} = \sqrt{3} \rightarrow \sqrt{3}$$

Die Punktfolge  $(1/n, 0, 0)$  konvergiert gegen  $(0, 0, 0)$  mit

$$f(1/n, 0, 0) = \frac{1/n}{\sqrt{1/n^2}} = 1 \rightarrow 1$$

Damit ist  $f$  im Nullpunkt nicht stetig.

# Kurven(-integrale)



## 1. Aufgabe:

a) Einheitskreis im  $\mathbb{R}^2$  um den Nullpunkt, der mehrmals umrundet wird.

b) Es ist

$$s_f(t) = \int_0^t \|f'(\tau)\|_2 d\tau = \int_0^t \left\| \begin{pmatrix} -\sin(\tau^3)2\tau^2 \\ \cos(\tau^3)2\tau^2 \end{pmatrix} \right\|_2 d\tau = \int_0^t 3\tau^2 d\tau = t^3$$

c) Das ist genau die Parametrisierung (Beschreibung) des Kreises, die bei der Ersetzung  $s = t^3$  (siehe b)) herauskommt

$$g(s) = \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \end{pmatrix}$$

Man erhält immer noch den Einheitskreis (Spur) und der Tangentialvektor hätte immer die Länge 1 (normierte Parametrisierung)

## 2. Aufgabe:

Nach Abschnitt 15.2.1. ist für eine Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow V$  und eine stetige Geschwindigkeitsfunktion  $h : V \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\gamma} h ds := \int_a^b h(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|_2 dt$$

a)

$$\gamma'_1(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \|\gamma'_1(t)\|_2 = 5, h(\gamma_1(t)) = 16t^2 + 72t^3$$

$$\int_{\gamma_1} h ds = \int_{-1}^1 80t^2 + 360t^4 dt = \frac{80}{3}t^3 + 90t^4 \Big|_{-1}^1 = \frac{160}{3}$$

b) Da  $t \geq 0$

$$\gamma'_2(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 8t \end{pmatrix}, \|\gamma'_2(t)\|_2 = 10t, h(\gamma_2(t)) = -t^2$$

$$\int_{\gamma_2} h ds = \int_0^2 -10t^3 dt = \left. -\frac{10}{4}t^4 \right|_0^2 = -40$$

## 3. Aufgabe:

Nach 15.2. ist ( $\cdot$  Skalarprodukt)

$$\int_{\gamma} F \vec{ds} := \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Man berechnet

$$F(\gamma_1(t)) = \begin{pmatrix} 2t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}, \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \Rightarrow \int_{\gamma_1} F \vec{ds} = \int_0^1 4t^3 = 1$$

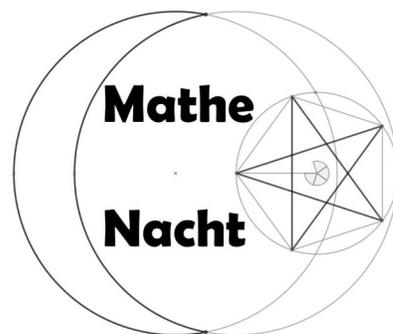
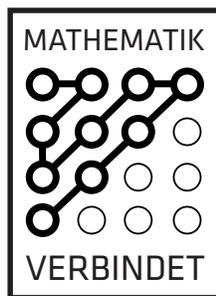
$$F(\gamma_2(t)) = \begin{pmatrix} 2t^4 \\ t^2 \end{pmatrix}, \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \int_{\gamma_2} F \vec{ds} = \int_0^1 5t^4 = 1$$

Das ist **kein** Zufall. Wenn

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \partial_{x_2} P = \partial_{x_1} Q$$

gilt, erhält man immer den selben Wert für das Kurvenintegral 2. Art, egal welchen Weg man von  $(0, 0)$  nach  $(1, 1)$  geht. Mehr dazu in Differentialgeometrie!

# Differentialrechnung Lösungen



## 1. Aufgabe:

a) Man berechnet

$$\partial_1 f = \begin{cases} \frac{x_1^4 x_2 + 4x_1^3 x_2^3 - x_2^5}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0, & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\partial_2 f = \begin{cases} \frac{-x_1 x_2^4 - 4x_1^3 x_2^2 + x_1^5}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0, & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

Die 2. Ableitungen stimmen nicht überein denn

$$\partial_2 \partial_1 f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial_1 f(0, h) - \partial_1 f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h^5}{h^4} - 0}{h} = -1$$

$$\partial_1 \partial_2 f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial_2 f(h, 0) - \partial_2 f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = 1$$

b)  Das ist falsch. Denn sonst müsste es eine (totale) Ableitung  $D(f)(0, 1) = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  geben mit

$$y - (0, 1) \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{f(y) - f(0, 1) + (a, b)(y - x)}{\|y - (0, 1)\|_2} \rightarrow 0$$

Betrachte  $y_n = (1/n, 1)$  mit  $y_n - x \rightarrow 0$ . Es gilt

$$\frac{f(y_n) - f(0, 1) + (a, b)(y_n - x)}{\|y_n - (0, 1)\|_2} = \frac{1/n - 0 + a/n}{1/n} \rightarrow 1 + a$$

Damit das gegen Null konvergiert, muss  $a = -1$ . Wenn man aber  $y_n = (-1/n, 1)$  mit  $y_n - x \rightarrow 0$  betrachtet, gilt

$$\frac{f(y_n) - f(0, 1) + (a, b)(y_n - x)}{\|y_n - (0, 1)\|_2} = \frac{1/n - 0 - a/n}{1/n} \rightarrow 1 - a$$

Damit das gegen Null konvergiert, muss  $a = 1$  sein. Damit kann es keine totale Ableitung  $(a, b)$  in  $(0, 1)$  geben.

Das ist richtig, da  $f$  eine Hintereinanderausführung von stetigen Funktionen ist.

Das ist falsch, denn der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 1) - f(0, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - 0}{h} (= \partial_1 f(0, 1))$$

existiert nicht (links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen nicht überein). Die 1. partielle Ableitung nach  $x_2$  würde aber existieren.

□ Das ist richtig, denn

$$\partial_1 f(1, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h, 0) - f(1, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\partial_2 f(1, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1, h) - f(1, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1$$

und damit  $\nabla f(x_1, x_2) = (0, 1)^\top$

## 2. Aufgabe:

a) Der Gradient ist

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 6xy + 3y^2 - 3 \\ -3x^2 + 6xy + 3y^2 - 21 \end{pmatrix}$$

Um die extremwertverdächtigen Stellen zu erhalten, muss man  $3x^2 - 6xy + 3y^2 - 3 = 0$ ,  $-3x^2 + 6xy + 3y^2 - 21 = 0$  lösen. Bei der Addition beider Gleichungen resultiert  $y^2 = 4$ . Also die beiden Lösungen  $y = 2$  und  $y = -2$ . Für  $y = 2$  reduzieren sich beiden Gleichungen zu quadratischen Gleichungen mit den Lösungen 3 und 1, bei  $y = -2$  erhält man die Lösungen  $-3$  und  $-1$ . Also sind die extremwertverdächtigen Stellen

$$(3, 2), (1, 2), (-3, -2), (-1, -2)$$

b) Es ist  $\nabla f(x) = (2ax_1, 2bx_2)^\top$  und

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten  $\lambda_1 = 2a$ ,  $\lambda_2 = 2b$ . Für alle Konstellationen gilt  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)^\top$ , damit ist  $(0, 0)$  extremwertverdächtige Stelle. Für  $(a, b) = (1, 1)$  sind beide Eigenwerte der Hessematrix positiv  $\Rightarrow$  lokales Minimum. Für  $(a, b) = (-1, -1)$  sind beide Eigenwerte negativ, also liegt ein lokales Maximum vor. Für  $(a, b) = (-1, 1)$  hat man einen negativen und einen positiven Eigenwert, also einen Sattelpunkt.

## 3. Aufgabe:

a) Die Richtungsableitung gibt den Anstieg in Richtung  $e$  an. Der normierte Gradient  $e_1 = \nabla f(x) / \|\nabla f(x)\|$  ist die Richtung, für die die Richtungsableitung maximal wird (steilster Anstieg) und analog gibt  $e_2 = -e_1$  den minimalen Anstieg an.

b) Nach der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} u'(x) &= \partial_x f(x, y, z)|_{y=g(x), z=h(x, x+1)} + \partial_y f(x, y, z)|_{y=g(x), z=h(x, x+1)} \cdot g'(x) \\ &\quad + \partial_z f(x, y, z)|_{y=g(x), z=h(x, x+1)} \cdot (\partial_x h(x, y)|_{y=x+1} + \partial_y h(x, y)|_{y=x+1}) \end{aligned}$$

und damit bei  $x = 1$

$$u'(1) = \partial_x f(1, 2, 3) + \partial_y f(1, 2, 3) \cdot g'(1) + \partial_z f(1, 2, 3)(\partial_x h(1, 2) + \partial_y h(1, 2))$$